ŠTÁTNY PEDAGOGICKÝ ÚSTAV

CIEĽOVÉ POŽIADAVKY NA VEDOMOSTI A ZRUČNOSTI MATURANTOV Z MATEMATIKY

BRATISLAVA 2019

Schválilo Ministerstvo školstva, vedy, výskum a športu Slovenskej republiky

dňa 12. júna 2019 pod číslom 2019/2049:2-A1020 s platnosťou od 1. 9. 2019

ÚVOD

Podľa školského zákona je cieľom maturitnej skúšky overenie vedomostí a zručností žiakov v rozsahu učiva určeného Katalógom cieľových požiadaviek a overenie toho, ako sú žiaci pripravení používať získané kompetencie v ďalšom štúdiu alebo pri výkone povolaní a odborných činností, na ktoré sa pripravujú.

Cieľom maturitnej skúšky z matematiky je overiť porozumenie matematických pojmov a súvislostí medzi nimi, schopnosť riešiť úlohy komplexného charakteru a zhodnotiť úroveň argumentácie žiaka.

PODROBNOSTI O SPÔSOBE KONANIA ÚSTNEJ FORMY INTERNEJ ČASTI MATURITNEJ SKÚŠKY

Každé maturitné zadanie sa skladá z troch úloh.

Úlohy žiadneho maturitného zadania nemôžu byť len z jedného tematického okruhu.

V maturitných zadaniach musia byť zastúpené všetky tematické celky z cieľových požiadaviek.

Charakteristika úloh maturitných zadaní

Úloha č. 1 **–** Žiak objasní (definuje) dané pojmy, uvedie ich príklady a kontrapríklady, sformuluje ich vlastnosti a súvislosti medzi uvedenými pojmami. Prevláda forma monológu.

Úloha č. 2 **–** Úloha je zameraná na argumentáciu a dôvodenie. Prevláda forma dialógu s členmi predmetovej maturitnej komisie.

Úloha č. 3 **–** Úloha je zameraná na postup riešenia príslušnej úlohy s rôznymi alternatívami. Prípadné vopred pripravené doplňujúce otázky budú zamerané na alternatívy pri iných číselných zadaniach.

Všeobecné pomôcky

Prehľad vzorcov pre riadny termín externej časti maturitnej skúšky z matematiky (aktuálny v danom školskom roku).

Kalkulačka, ktorá nie je súčasťou mobilného telefónu, nedokáže vykresľovať grafy, zjednodušovať algebrické výrazy obsahujúce premenné, počítať korene rovníc.

Hodnotenie

a) Každá úloha maturitného zadania sa hodnotí stupňom prospechu 1 až 5.
b) Váha hodnotenia jednotlivých úloh je 1 : 2 : 2. Pri výpočte váženého priemeru sa používa vzorec

$$z = \frac{z_1 + 2\,.\,z_2 + 2\,.\,z_3}{5},$$

pričom z je po zaokrúhlení výsledný stupeň prospechu a z_i je stupeň prospechu za úlohu č. i.

PODROBNOSTI O OBSAHU ÚSTNEJ FORMY INTERNEJ ČASTI MATURITNEJ SKÚŠKY

Cieľové požiadavky z matematiky sú rozdelené na časti *Obsah* a *Požiadavky na vedomosti a zručnosti.*

Text v jednotlivých častiach napísaný *obyčajnou kurzívou* predstavuje odvolávky, vysvetlivky a komentáre.

V každej kapitole sú v odseku *Obsah* (rozdelenom spravidla na 2 menšie časti s názvami *Pojmy* a *Vlastnosti a vzťahy*) vymenované termíny a vzťahy (vzorce, postupy, tvrdenia), ktoré má žiak ovládať. Toto ovládanie v prípade *pojmov* znamená, že žiak

- rozumie zadaniam úloh, v ktorých sa tieto pojmy vyskytujú,
- vie ich správne použiť pri formuláciách svojich odpovedí,
- vie ich stručne opísať (definovať).

V prípade *Vlastností a vzťahov* ovládaním rozumieme žiakovu schopnosť vybaviť si tieto vzťahy v mysli (bez toho, aby mu bolo potrebné pripomínať konkrétnu podobu uvedeného vzťahu, postupu či tvrdenia) a použiť ich pri riešení danej úlohy (pričom spôsob tohto použitia špecifikuje časť *Požiadavky na vedomosti a zručnosti*, o ktorej hovoríme nižšie). Pre prehľadnosť neuvádzame úplné znenie jednotlivých vzťahov so všetkými predpokladmi a podmienkami, ale len takú ich podobu, z ktorej je jasné, aké tvrdenie máme na mysli.

Pokiaľ sa v zadaniach úloh alebo otázok, ktoré má žiak riešiť alebo zodpovedať, vyskytnú pojmy, ktoré nie sú uvedené v časti *Obsah*, bude potrebné ich v texte zadania vysvetliť. Rovnako tak v prípade, že zadanie vyžaduje použitie postupu alebo vzťahu, ktorý nie je zahrnutý do časti *Obsah*, musí byť žiakovi k dispozícii opis požadovaného postupu alebo vzťahu (tento opis však nemusí byť súčasťou zadania, môže byť napríklad uvedený v prehľade vzorcov, ktorý bude priložený k celému súboru zadaní). Výnimku z tohto pravidla predstavuje situácia, keď riešením úlohy má byť *objavenie* alebo *odvodenie* takého vzťahu, ktorý nebol uvedený v odseku *Vlastnosti a vzťahy*.

Časť *Požiadavky na vedomosti a zručnosti* opisuje v každej kapitole činnosti, ktoré má byť žiak schopný správne realizovať. V texte používanú formuláciu *„žiak vie..."* pritom chápeme v zmysle *„žiak má vedieť..."*; podobne formulácia *„... pokiaľ (ak) žiak vie..."* znamená *„... ak je v týchto cieľových požiadavkách uvedené, že žiak má vedieť..."*. Teda napríklad text *„žiak vie nájsť všetky riešenia nerovnice* $f(x) \le a$*, pokiaľ vie riešiť rovnicu* $f(x) = a$ *a súčasne vie načrtnúť graf funkcie* f" (ktorý čitateľ nájde v kapitole 1.4) treba chápať tak, že na inom mieste týchto cieľových požiadaviek je špecifikované, grafy ktorých funkcií f má žiak vedieť načrtnúť, a pre ktoré funkcie f má žiak vedieť riešiť rovnicu $f(x) = a$. Podobnú úlohu plní odvolávka *„pozri..."*; napríklad v texte *„žiak vie nájsť definičný obor danej funkcie (pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy)"* táto odvolávka upozorňuje, že stupeň náročnosti, na ktorom má žiak zvládnuť určovanie definičného oboru funkcie, je daný náročnosťou rovníc a nerovníc, ktoré pritom musí vyriešiť, pričom táto náročnosť je opísaná v časti 1.4. Odvolávka *„pozri tiež..."* upozorňuje čitateľa, že uvedený pojem alebo činnosť sa vyskytuje aj na inom mieste tohto textu.

Žiak by mal byť schopný riešiť *úlohy komplexného charakteru*, teda úlohy, ktorých riešenie vyžaduje spojenie *neveľkého počtu* činností opísaných v týchto cieľových požiadavkách (pritom nevylučujeme spájanie činností opísaných v rôznych kapitolách); napr. pri riešení „klasickej" slovnej úlohy by mal žiak zvládnuť formuláciu príslušného problému v jazyku matematiky, jeho vyriešenie prístupnými matematickými prostriedkami a formuláciu odpovede opäť v jazyku pôvodného slovného zadania. Jednotlivé činnosti uvedené v časti *Požiadavky na vedomosti a zručnosti* predstavujú teda len akési „základné stavebné kamene", pričom riešenie jedného konkrétneho zadania môže vyžadovať i použitie a spojenie viacerých takýchto „základných stavebných kameňov".

V snahe o ucelenosť jednotlivých kapitol uvádzame tie pojmy a zručnosti, ktoré súvisia s viacerými kapitolami, v každej z nich. Z toho istého dôvodu sú do textu zaradené i niektoré pojmy, vzťahy a výkony, ktoré sú obsahom učiva základnej školy; tie sú v texte zvýraznené sivým podfarbením.

Minimálne štandardy stanovené Štátnym vzdelávacím programom pre 2. stupeň základnej školy sa považujú za východiskové obsahové a výkonové štandardy pre ďalšie vzdelávanie. Z tohto dôvodu sa v dokumente exaktne neuvádzajú štandardy tohto stupňa vzdelávania, pričom sa automaticky predpokladá ich osvojenie na požadovanej úrovni.

1 ZÁKLADY MATEMATIKY

1.1 Logika a množiny

Obsah

Pojmy:

výrok, axióma, definícia, hypotéza, tvrdenie, pravdivostná hodnota, logické spojky, negácia, konjunkcia, disjunkcia, implikácia, obmena implikácie, obrátená implikácia, ekvivalencia, vyplýva, je ekvivalentné, úsudok, platný úsudok, tautológia, kontradikcia, tabuľka pravdivostných hodnôt, kvantifikátor (existenčný, všeobecný, aspoň, najviac, práve), priamy a nepriamy dôkaz, dôkaz sporom, množina, prvky množiny, podmnožina, nadmnožina, prienik, zjednotenie a rozdiel množín, Vennove diagramy, disjunktné množiny, prázdna množina, doplnok množiny, konečná a nekonečná množina, počet prvkov množiny.

Vlastnosti a vzťahy:

- Implikácia (výrok) $A \Rightarrow B$ je ekvivalentná s implikáciou (výrokom) $B' \Rightarrow A'$ (výrok z A vyplýva B platí práve vtedy, keď platí výrok z negácie B vyplýva negácia A),
- výroky A, B sú ekvivalentné, ak platia obe implikácie $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$,
- negácia konjunkcie (disjunkcie) je disjunkcia (konjunkcia) negácií,
- implikácia $A \Rightarrow B$ je nepravdivá práve vtedy, keď je pravdivý výrok A a nepravdivý výrok B,
- pravdivostná hodnota zložených výrokov a negácie *(„tabuľka pravdivostných hodnôt”),*
- negácia výroku $\forall x \in M$ *platí V(x)* je $\exists x \in M$, *pre ktoré neplatí V(x),*
- negácia výroku $\exists x \in M$, *pre ktoré platí V(x)* je $\forall x \in M$ *neplatí V(x),*
- $A = B$ práve vtedy, keď súčasne platí $A \subset B, B \subset A$,
- pre počty prvkov zjednotenia dvoch množín platí $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$,
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$, $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- určiť, či daná vetná konštrukcia je výrokom (vrátane výrokov, keď ide o všeobecný výrok vyjadrený bez použitia všeobecných kvanitifikátorov),
- rozlíšiť používanie logických spojok a kvantifikátorov vo vyjadrovaní sa v bežnom živote na jednej strane a v rovine zákonov, nariadení, zmlúv, návodov, matematiky na strane druhej,
- na konkrétnych príkladoch vysvetliť rozdiel medzi vylučovacím a nevylučovacím chápaním spojky *alebo*,
- vysvetliť rozdiel medzi implikáciou a ekvivalenciou,
- tvoriť zložené výroky, zistiť štruktúru výrokov zložených z malého počtu jednoduchých výrokov pomocou logických spojok a určiť pravdivostnú hodnotu takýchto výrokov z pravdivostných hodnôt jednotlivých zložiek (napr. *pomocou tabuľky pravdivostných hodnôt),*
- v jednoduchých prípadoch rozhodnúť, či je výrok negáciou daného výroku, vytvoriť negáciu zloženého výroku (nie len pomocou *„nie je pravda, že…”*),

- vysvetliť de Morganove pravidlá pre negáciu výrokov $A \wedge B$ a $A \vee B$,
- dokumentovať použitie poznatkov o pravdivosti implikácií a ekvivalencií pri riešení rovníc na konkrétnych príkladoch (pozri tiež *dôsledkové a ekvivalentné úpravy, skúška správnosti v 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy*),
- rozhodnúť o pravdivosti jednoduchých tvrdení, špeciálne o správnosti postupov riešení rovníc a nerovníc (pozri tiež *1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy*),
- rozhodnúť o platnosti jednoduchých úsudkov (napr. *pomocou tabuľky pravdivostných hodnôt, použitím množinového diagramu alebo použitím protipríkladu v prípade neplatného úsudku*),
- vysvetliť, kedy na dôkaz nepravdivosti tvrdenia možno použiť protipríklad a v jednoduchých prípadoch vysloviť protipríklad všeobecných tvrdení,
- vysvetliť myšlienku základných druhov dôkazov (priamy, nepriamy, sporom), dokumentovať ich príkladmi a vysvetliť ich súvis s poznatkami o pravdivosti implikácie, resp. so základnými platnými úsudkami (*modus ponens a modus tollens*),
- použiť základné druhy dôkazov pri dokazovaní jednoduchých tvrdení,
- určiť zjednotenie, prienik a rozdiel množín i doplnok množiny *A* (ak *A* je podmnožinou *B*) vzhľadom na množinu *B (intervaly* pozri v *1.2 Čísla, premenné a výrazy)*,
- zdôvodniť vzťahy pre doplnok zjednotenia a prieniku (de Morganove vzorce),
- v jednoduchých prípadoch zapísať a určiť množinu vymenovaním jej prvkov, charakteristickou vlastnosťou alebo množinovými operáciami,
- v jednoduchých prípadoch rozhodnúť o konečnosti či nekonečnosti danej množiny,
- zdôvodniť vzťah pre počet prvkov zjednotenia dvoch množín a použiť ho pri hľadaní počtu prvkov týchto množín, resp. ich prieniku alebo zjednotenia,
- pri riešení úloh o množinách a úsudkoch použiť ako pomôcku Vennove diagramy (pre 2 – 4 množiny).

1.2 Čísla, premenné a výrazy

Obsah

Pojmy:

konštanta, premenná, výraz, obor definície výrazu, rovnosť výrazov, hodnota výrazu, mnohočlen, stupeň mnohočlena, doplnenie do štvorca *(pre kvadratický mnohočlen)*, člen mnohočlena, vynímanie pred zátvorku, úprava na súčin, zjednodušovanie výrazu, prirodzené *(N)*, celé (*Z*), nezáporné (N_0), záporné $\left(Z^-\right)$, racionálne *(Q)*, iracionálne (*I*), reálne *(R)* čísla, *n*-ciferné číslo, zlomky (čitateľ, menovateľ, spoločný menovateľ, základný tvar zlomku, zložený zlomok, hlavná zlomková čiara), desatinný rozvoj/dekadický zápis (konečný, nekonečný a periodický), desatinné číslo, číslo π, nekonečno, číselná os, znázorňovanie čísel, interval (uzavretý, otvorený, ohraničený, neohraničený), komutatívny, asociatívny a distributívny zákon, odmocnina (druhá), *n*-tá odmocnina, mocnina (s prirodzeným, celočíselným, racionálnym exponentom), exponent a základ mocniny, základ logaritmu, absolútna hodnota čísla, úmera (priama a nepriama), pomer, percento, promile, základ *(pre počítanie s percentami)*, faktoriál, kombinačné číslo, pozičná číselná sústava a jej základ, dvojková a desiatková sústava, približné číslo, platná číslica, (absolútna) chyba približného čísla.

Vlastnosti a vzťahy:

- $x^2 - y^2 = (x-y)\cdot(x+y)$, $x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$, $ax^2 + bx + c = a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$, kde x_1, x_2 sú korene rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$,

- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$, $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$, $(ab)^x = a^x \cdot b^x$, $c^0 = 1$, $a, b \geq 0, c > 0, x, y \in Z$, Q,
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$, $\left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$, $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$, pre $x, y \geq 0$, $m, n \in N$,
- $\sqrt{a^2} = |a|$,
- $|x - a|$ je vzdialenosť obrazov čísel x a a na číselnej osi,
- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$,
- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$,
  $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$,
  $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,
- $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$, $a^{\log_a x} = x$, pre $a > 0, a \neq 1, x > 0$, $b > 0$,
- $\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$, $\log_a x - \log_a y = \log_a \dfrac{x}{y}$, pre $a > 0$, $a \neq 1$, $x, y > 0$,
- $\log_a\left(x^y\right) = y \cdot \log_a x$, pre $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$,
- $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, pre prirodzené čísla n, $0! = 1$,
- $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!.(n-k)!}$, pre prirodzené čísla n a nezáporné celé čísla k, nie väčšie ako n,
- práve racionálne čísla majú desatinný periodický rozvoj,
- $R = Q \cup I$, $Q \cap I = \{\ \}$, $Z = N \cup Z^- \cup \{0\}$, $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti
Žiak vie:
(čísla)

- zaokrúhľovať čísla (aritmeticky, nahor, nadol, na daný počet platných cifier),
- upraviť reálne číslo na tvar $\pm a \cdot 10^n$, kde n je celé číslo a a číslo z intervalu $\langle 1,10)$,
- vypočítať absolútnu hodnotu reálneho čísla,
- zapísať vzdialenosť na číselnej osi pomocou absolútnej hodnoty,
- znázorňovať čísla na číselnú os, porovnávať čísla na číselnej osi, odčítať čísla z číselnej osi,
- vyjadriť zjednotenie, prienik a rozdiel konečného počtu intervalov pomocou najmenšieho počtu navzájom disjunktných intervalov, jednoprvkových množín a prázdnej množiny,
- pre konkrétne n všeobecne zapísať n-ciferné číslo,
- na približný výpočet číselných výrazov a hodnôt funkcií (vrátane $\log_a x$) používať kalkulačku, pričom vie
  - upravovať číselné výrazy na tvar vhodný pre výpočet na kalkulačke,
  - zvoliť vhodný postup, aby mu vyšiel čo najpresnejší výsledok (napr. *pri približnom výpočte* $\dfrac{20!}{10! \cdot 10!}$),
- pomocou kalkulačky zistiť ostrý uhol, ktorý má danú goniometrickú hodnotu,
- porovnať dve reálne čísla na úrovni presnosti kalkulačky,
- používať zjednodušené pravidlá na počítanie s približnými číslami,
- vysvetliť odhad chyby súčtu dvoch približných čísel a súčinu presného a nepresného čísla,

- počítať s približnými hodnotami vrátane odhadu absolútnej chyby súčtu viacerých sčítancov, resp. súčinu presného a približného čísla,
- vysvetliť princíp zápisu v pozičnej sústave a na základe toho prepísať číslo z pozičnej sústavy s iným základom ako 10 do desiatkovej sústavy,
- vysvetliť princíp sčítania a násobenia v dvojkovej sústave,

(výrazy)

- určiť hodnotu výrazu *(dosadiť)* „ručne“ alebo pomocou kalkulačky,
- určiť obor definície výrazu (pozri *1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy),*
- odstrániť absolútnu hodnotu rozlišovaním vhodných prípadov (t. j. $|V(x)| = V(x)$ *pre x, pre ktoré* $V(x) \geq 0$ a $|V(x)| = -V(x)$ *pre x, pre ktoré* $V(x) \leq 0$),
- doplniť kvadratický trojčlen do štvorca (pozri tiež *2.2 Lineárna a kvadratická funkcia, aritmetická postupnosť),*
- upravovať mnohočlen na súčin vynímaním pred zátvorku a použitím vzťahov pre rozklady výrazov $x^2 - y^2$, $x^2 \pm 2xy + y^2$, $ax^2 + bx + c$,
- použiť pri úpravách výrazov (číselných alebo výrazov s premennými) rovnosti uvedené v časti *Vlastnosti a vzťahy*, roznásobovanie, vynímanie pred zátvorku, krátenie, úpravu zloženého zlomku na jednoduchý,

(práca s premennou)

- používať percentá a úmeru,
- nahradiť premennú vo výraze novým výrazom *(substitúcia,* pozri tiež *1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy),*
- vyjadriť neznámu zo vzorca (pozri *2.1 Funkcia a jej vlastnosti, postupnosti),*
- zapísať slovný text algebraicky *(matematizácia),*
  - zapísať vzťahy (v jednoduchom texte) pomocou premenných, čísel, rovností a nerovností,
  - zapísať, vyjadriť bežné závislosti v geometrii,
  - v jednoduchých prípadoch odvodiť zo známych vzťahov niektoré nové vzťahy,
- riešiť kontextové *(slovné)* úlohy vedúce k rovniciam a nerovniciam (pozri *1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy)* a interpretovať získané riešenia v jazyku pôvodného zadania.

1.3 Teória čísel

Obsah

Pojmy:

deliteľ, násobok, deliteľnosť, najväčší spoločný deliteľ (NSD), najmenší spoločný násobok (NSN), prvočíslo, zložené číslo, súdeliteľné a nesúdeliteľné čísla, zvyšok, prvočíselný rozklad, prvočiniteľ.

Vlastnosti a vzťahy:

- Znaky deliteľnosti číslom 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- zistiť bez delenia, či je dané číslo deliteľné niektorým z čísel uvedených v znakoch deliteľnosti,
- sformulovať a použiť kritériá deliteľnosti niektorými zloženými číslami, ktoré sú súčinom nesúdeliteľných čísel uvedených v znakoch deliteľnosti (napr. *6, 12, 15),*
- nájsť NSN, NSD daných čísel pomocou prvočíselného rozkladu,

- nájsť celočíselné riešenia úloh, v ktorých možno jednoduchou úvahou určiť vhodnú konečnú množinu, ktorá hľadané riešenia musí obsahovať *(riešenia úlohy potom nájde preverením jednotlivých prvkov získanej konečnej množiny)*,
- pri riešení jednoduchých úloh využiť pravidelnosť rozloženia násobkov celých čísel na číselnej osi.

1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy

Obsah

Pojmy:

rovnica, nerovnica, sústava rovníc, sústava nerovníc a ich riešenie, koeficient, koreň, koreňový činiteľ, diskriminant, doplnenie do štvorca, úprava na súčin, substitúcia, kontrola (skúška správnosti) riešenia, (ekvivalentné a neekvivalentné) úpravy rovnice a nerovnice, lineárny, kvadratický člen, koeficient pri lineárnom (kvadratickom) člene.

Vlastnosti a vzťahy:

- Diskriminant kvadratickej rovnice $ax^2+bx+c=0$ je $D=b^2-4ac$,
- riešením kvadratickej rovnice $ax^2+bx+c=0$ s nezáporným diskriminantom sú $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$,
- vzťah medzi hodnotou diskriminantu a počtom (navzájom rôznych) koreňov kvadratickej rovnice,
- $ax^2+bx+c=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$, kde x_1,x_2 sú korene rovnice $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$,
- vzťah medzi znamienkom súčinu dvoch výrazov a znamienkom jednotlivých činiteľov,
- vzťah medzi koreňmi kvadratickej rovnice a koreňovými činiteľmi (Viètove vzťahy).

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

(rovnice)

- nájsť všetky riešenia lineárnej rovnice $ax+b=0$ a kvadratickej rovnice $ax^2+bx+c=0$,
- nájsť všetky riešenia, resp. všetky riešenia ležiace v danom intervale *I* (ak sa nedá presne, tak približne pomocou kalkulačky) rovnice $f(x)=A$, kde $A\in R$ a *f* je funkcia
  - x^a, b^x, $\log_b x$ ($a\in Q$, *b* je kladné číslo rôzne od 1),
  - $|x-a|$,
  - $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$,

  a vie určiť, koľko riešení má uvedená rovnica (v závislosti od čísla *A*, čísel *a*, *b*, *c*, resp. intervalu *I*),
- použitím danej substitúcie $y=\varphi(x)$ upraviť rovnicu zapísanú v tvare $f(\varphi(x))=A$ na tvar $f(y)=A$, špeciálne vie nájsť všetky riešenia (resp. všetky riešenia ležiace v danom intervale *I*) rovníc
  - $f(ax+b)=A$, kde *f* je funkcia x^a, b^x, $\log_b x$, $\sin x$, $\cos x$,
  - $f(ax^2+bx+c)=A$, kde *f* je funkcia x^a, b^x, $\log_b x$,
- nájsť všetky riešenia (resp. všetky riešenia ležiace v danom intervale *I*) rovníc zapísaných v tvare $f(x)g(x)=0$, pokiaľ vie riešiť rovnice $f(x)=0$, $g(x)=0$,

- nájsť všetky riešenia (resp. všetky riešenia ležiace v danom intervale *I*) rovníc, ktorých tvar možno upraviť na niektorý z predchádzajúcich tvarov
  - použitím úprav jednotlivých strán rovnice, využívajúcich úpravy výrazov a základné vlastnosti funkcií *(*pozri *1.2 Čísla, premenné a výrazy, 2 Funkcie),*
  - pripočítaním (špeciálne odpočítaním) a vynásobením (špeciálne vydelením) obidvoch strán rovnice výrazom, umocnením (špeciálne odmocnením) obidvoch strán rovnice,
  - odstránením absolútnej hodnoty v prípade rovníc s jednou absolútnou hodnotou *(rozlišovaním dvoch vhodných prípadov),*

  pričom vie rozhodnúť
  - či použitá úprava zachová alebo či môže zmeniť množinu riešení danej rovnice,
  - ktoré z koreňov rovnice, ktorá vznikla uvedenými úpravami, sú aj koreňmi pôvodnej rovnice, resp. pri použití postupov, ktoré mohli množinu potenciálnych koreňov zmenšiť, o ktorých číslach ešte treba zistiť, či sú koreňmi pôvodnej rovnice,
- rozhodnúť o správnosti postupov riešení uvedených v predchádzajúcich bodoch,
- riešiť kontextové *(slovné)* úlohy vedúce k rovniciam a interpretovať získané riešenia v jazyku pôvodného zadania,

(sústavy rovníc)

- geometricky interpretovať množinu všetkých riešení jednej a dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi *(*pozri *3.2 Analytická geometria v rovine, 4.2 Súradnicová sústava v priestore),*
- nájsť všetky riešenia sústavy 2 rovníc s 2 neznámymi, ktorú možno jednoducho upraviť na tvar $y = f(x) \wedge g(x, y) = 0$ (resp. $x = f(y) \wedge g(x, y) = 0$), pokiaľ vie riešiť rovnicu $g(x, f(x)) = 0$ (resp. $g(f(y), y) = 0$),
- upravovať sústavy rovníc použitím
  - úprav jednotlivých strán rovnice, využívajúcich úpravy výrazov a základné vlastnosti elementárnych funkcií *(*pozri *1.2 Čísla, premenné a výrazy, 2 Funkcie),*
  - pripočítania (špeciálne odpočítania) a vynásobenia (špeciálne vydelenia) obidvoch strán rovnice výrazom,

  pričom vie rozhodnúť,
  - či použitá úprava zachová alebo či môže zmeniť množinu riešení danej sústavy,
  - ktoré z riešení sústavy, ktorá vznikla uvedenými úpravami, sú aj riešeniami pôvodnej sústavy, resp. pri použití postupov, ktoré mohli množinu potenciálnych riešení zmenšiť, o ktorých číslach ešte treba zistiť, či sú riešeniami pôvodnej sústavy,

(nerovnice a ich sústavy)

- nájsť množinu všetkých riešení nerovnice
  - $f(x) * L$, kde L je reálne číslo, $*$ je jeden zo znakov nerovnosti $<, \leq, \geq, >$, f je niektorá z funkcií $(ax + b)^{\alpha}$, b^x, $\log_b x$, $|x - a|$, resp. množinu všetkých riešení tejto nerovnice ležiacich v danom intervale,
  - $f(x) * L$, kde f je niektorá z funkcií $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$,
  - $\dfrac{f(x)}{g(x)} * 0$ a $f(x)g(x) * 0$, pokiaľ vie riešiť nerovnice $f(x) * 0$, $g(x) * 0$, kde $*$ je znak nerovnosti,
- nájsť všetky riešenia nerovníc, ktorých riešenie možno postupmi uvedenými v nasledujúcom bode nahradiť riešením nerovníc uvedených v predchádzajúcom bode,
- pri riešení a úpravách nerovníc správne použiť
  - vynásobenie obidvoch strán nerovnice kladným alebo záporným číslom,
  - pripočítanie výrazu k obidvom stranám nerovnice,

- riešiť sústavu nerovníc s jednou neznámou v prípadoch, keď vie vyriešiť samostatne každú z daných nerovníc *(*pozri *prieniky a zjednotenia intervalov v 1.2 Čísla, premenné a výrazy),*
- vyznačiť na x-ovej osi riešenie nerovnice $f(x)*g(x)$, pokiaľ vie načrtnúť grafy funkcií $y = f(x)$, $y = g(x)$,
- v rovine opísať a geometricky interpretovať množinu všetkých riešení jednej nerovnice s dvoma neznámymi x, y, ktorú možno zapísať v tvare

    - $y * f(x)$ alebo $x * f(y)$ (kde $*$ je znak nerovnosti) v tých prípadoch, kedy vie načrtnúť graf funkcie $y = f(x)$, resp. $x = f(y)$,
    - $ax + by + c * 0$,

- riešiť kontextové *(slovné)* úlohy vedúce k nerovniciam a interpretovať získané riešenia v jazyku pôvodného zadania.

2 FUNKCIE

2.1 Funkcia a jej vlastnosti, postupnosti

Obsah

Pojmy:

premenná (veličina), „daná premenná je funkciou inej premennej", funkcia, postupnosť, argument, funkčná hodnota, *(n*-tý*)* člen postupnosti, definičný obor a obor hodnôt funkcie, graf funkcie, rastúca, klesajúca, nerastúca, neklesajúca, monotónna funkcia (postupnosť), maximum (minimum) funkcie (postupnosti), lokálne maximum a minimum funkcie, zhora (zdola) ohraničená funkcia (postupnosť), ohraničená funkcia (postupnosť), horné (dolné) ohraničenie, konštantná, prostá, párna a nepárna, inverzná, zložená, periodická funkcia, rekurentý vzťah, postupnosť daná rekurentne.

Vlastnosti a vzťahy:

- Rastúca (klesajúca) funkcia je prostá,
- k prostej funkcii existuje inverzná funkcia,
- graf inverznej funkcie f^{-1} je súmerný s grafom funkcie f podľa priamky $y = x$,
- $f(f^{-1}(x)) = x$,
- graf párnej funkcie f je súmerný podľa osi y,
- graf nepárnej funkcie f je súmerný podľa bodu [0, 0].

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- v jednoduchých prípadoch rozhodnúť, či niektorá z dvoch daných premenných veličín je funkciou druhej z nich, a túto závislosť vyjadriť, ak je to možné urobiť pomocou predpisov funkcií, ktoré pozná,
- jednoduchý vzťah opísaný slovne (špeciálne lineárnu závislosť) zapísať pomocou konštánt a premenných,
- v jednoduchých prípadoch zvoliť vhodnú reprezentáciu daného vzťahu medzi dvoma veličinami,
- zaznačiť známu veľkosť funkčnej hodnoty do grafu funkcie,
- z daného grafu funkcie (postupnosti)
  - určiť s dostatočnou presnosťou
    - funkčnú hodnotu v danom bode,
    - jej extrémy a lokálne extrémy,
    - intervaly, na ktorých rastie (klesá),
  - zistiť, či je zdola (zhora) ohraničená, párna, nepárna,
- nájsť pre dané hodnoty nezávislých premenných hodnotu závisle premennej, ak je vzťah medzi závislou a jednou alebo dvoma nezávislými premennými opísaný vzorcom alebo tabuľkou,
- nájsť definičný obor danej funkcie, resp. rozhodnúť, či dané číslo patrí do definičného oboru danej funkcie *(*pozri *1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy),*
- rozhodnúť, či dané číslo patrí do oboru hodnôt danej funkcie *(*pozri *1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy),*
- nájsť funkčnú hodnotu funkcie v danom bode, určiť jej priesečníky so súradnicovými osami, nájsť priesečníky grafov dvoch funkcií *(*pozri *1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy),*

- pri danom grafe na intuitívnej úrovni pracovať s pojmom rýchlosť zmeny,
- načrtnúť graf funkcie daných jednoduchých vlastností (rast/klesanie, lokálne maximá/minimá, kladnosť/zápornosť, ohraničenosť, súmernosti),
- v prípade konštantnej funkcie a funkcií $ax+b$, ax^2+bx+c, $\dfrac{ax+b}{cx+d}$, x^a, a^x, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$
  - určiť v danom intervale ich obor hodnôt,
  - určiť intervaly, na ktorých sú tieto funkcie rastúce, resp. klesajúce,
  - načrtnúť ich grafy,
  - nájsť ich najväčšie, resp. najmenšie hodnoty v danom intervale $\langle a, b\rangle$,
  - rozhodnúť, ktoré z nich sú v danom intervale I
    - prosté,
    - zhora (zdola) ohraničené,
    - párne, nepárne,
- načrtnúť grafy funkcií
  - $|ax+b|$,
  - $a+f(x)$, $f(a+x)$, $-f(x)$, $|f(x)|$, $a\cdot f(x)$, ak pozná graf funkcie f a opísať, ako vznikne uvedený graf z grafu funkcie *f*,
- načrtnúť graf inverznej funkcie f^{-1}, ak pozná graf prostej funkcie *f*,
- nájsť inverzné funkcie k funkciám $ax+b$, $\dfrac{ax+b}{cx+d}$, x^a, a^x, $\log_a x$,
- v jednoduchých prípadoch rozhodnúť o existencii riešenia rovnice $f(x)=0$ (resp. $f(x)=a$), pokiaľ vie načrtnúť graf funkcie *f*,
- graficky znázorniť na číselnej osi množinu riešení nerovnice $f(x)*a$, kde $*$ je jeden zo symbolov $<, \leq, \geq, >$, pokiaľ vie načrtnúť graf funkcie *f*,
- nájsť všetky riešenia nerovnice $f(x)*a$, pokiaľ vie riešiť rovnicu $f(x)=a$ a súčasne vie načrtnúť graf funkcie *f*,
- vypočítať hodnotu daného člena postupnosti danej jednoduchým rekurentným vzťahom.

2.2 Lineárna a kvadratická funkcia, aritmetická postupnosť

Obsah

Pojmy:

lineárna a kvadratická funkcia, aritmetická postupnosť, smernica priamky, diferencia aritmetickej postupnosti, vrchol paraboly.

Vlastnosti a vzťahy:

- grafom lineárnej (kvadratickej) funkcie je priamka (parabola),
- lineárna (kvadratická) funkcia je jednoznačne určená funkčnými hodnotami v 2 (3) bodoch,
- vzťah medzi koeficientom pri lineárnom člene a rastom, resp. klesaním lineárnej funkcie,
- vzťah medzi diferenciou aritmetickej postupnosti a jej rastom, resp. klesaním,
- kvadratická funkcia má na R jediný globálny extrém, minimum v prípade kladného koeficientu pri kvadratickom člene, maximum v opačnom prípade,

- parabola *(t. j. graf kvadratickej funkcie)* je súmerná podľa rovnobežky s osou *y* prechádzajúcej vrcholom paraboly.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti
Žiak vie: (pozri tiež *2.1 Funkcia a jej vlastnosti)*
- riešiť lineárne a kvadratické rovnice a nerovnice (pozri *1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy)*, špeciálne vie nájsť priesečníky grafov 2 lineárnych (resp. 2 kvadratických) funkcií alebo lineárnej a kvadratickej funkcie,
- nájsť predpis lineárnej (alebo konštantnej) funkcie, ak pozná
  - hodnoty v 2 bodoch,
  - hodnotu v 1 bode a smernicu grafu tejto funkcie,
- nájsť predpis kvadratickej funkcie, ak pozná
  - jej hodnoty v 3 vhodne zvolených bodoch,
  - vrchol jej grafu a hodnotu v ďalšom bode,
- nájsť intervaly, na ktorých je daná lineárna alebo kvadratická funkcia rastúca, resp. klesajúca,
- nájsť, pokiaľ existuje, najväčšiu a najmenšiu hodnotu kvadratickej a lineárnej funkcie v danom intervale, špeciálne vie nájsť vrchol grafu kvadratickej funkcie, ak pozná jej predpis,
- na základe vlastností priamej úmernosti zdôvodniť, prečo je jej grafom priamka prechádzajúca počiatkom súradnicovej sústavy,
- rozlíšiť lineárnu a exponenciálnu závislosť a uviesť typické príklady týchto závislostí,
- určiť hodnotu ľubovoľného člena aritmetickej postupnosti, ak pozná
  - jeden jej člen a diferenciu,
  - dva rôzne členy,
- pre aritmetickú postupnosť (danú explicitne) napísať zodpovedajúci rekurentný vzťah,
- nájsť súčet *n* (pre konkrétne *n*) za sebou nasledujúcich členov danej aritmetickej postupnosti.

2.3 Mnohočleny a mocninové funkcie, lineárna lomená funkcia

Obsah

Pojmy:

mocnina, mocnina s prirodzeným, celočíselným a racionálnym exponentom, *n*-tá odmocnina, polynóm, mnohočlen, mocninová funkcia, koeficient pri *n*-tej mocnine *(v polynomickej funkcii)*, exponent, lineárna lomená funkcia, asymptoty grafu lineárnej lomenej funkcie.

Vlastnosti a vzťahy:

- Polynóm stupňa *n* má najviac *n* rôznych reálnych koreňov,
- polynóm nepárneho stupňa má aspoň jeden reálny koreň,
- $x^{r+s} = x^r \cdot x^s$, $\left(x^r\right)^s = x^{rs}$, $\frac{1}{x^r} = x^{-r}$, $(xy)^r = x^r \cdot y^r$, $r, s \in Z, Q$,
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$, $\left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$, $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$, pre $x, y \geq 0$, $m, n \in N$.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti
Žiak vie: (pozri tiež *2.1 Funkcia a jej vlastnosti)*
- použiť rovnosti z časti *Vlastnosti a vzťahy* pri úpravách výrazov (pozri *1.2 Čísla, premenné a výrazy)*,

- zdôvodniť rovnosti uvedené v posledných dvoch bodoch časti *Vlastnosti a vzťahy,*
- riešiť rovnice a nerovnice s polynomickými, mocninovými a lineárnymi lomenými funkciami (pozri *1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy),*
- schematicky načrtnúť a porovnať grafy funkcií $y = x^n$ pre rôzne hodnoty $n \in Z$ na intervaloch $(-\infty, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, \infty)$,
- nájsť rovnice asymptot grafu lineárnej lomenej funkcie a načrtnúť graf tejto funkcie,
- nájsť intervaly, na ktorých je lineárna lomená funkcia rastúca, resp. klesajúca a nájsť k nej inverznú funkciu.

2.4 Logaritmické a exponenciálne funkcie, geometrická postupnosť

Obsah

Pojmy:

exponenciálna a logaritmická funkcia, základ exponenciálnej a logaritmickej funkcie, logaritmus, dekadický logaritmus, číslo *e* a prirodzený logaritmus, geometrická postupnosť, kvocient geometrickej postupnosti.

Vlastnosti a vzťahy:

- $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$, $\left(a^r\right)^s = a^{rs}$, pre $a > 0, a \neq 1, r, s \in R$,
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$,
- $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$, pre $a > 0, a \neq 1, b > 0, x \in R$,
- $\log_a r + \log_a s = \log_a rs$, $\log_a r - \log_a s = \log_a \frac{r}{s}$, pre $a > 0, a \neq 1, r, s > 0$,
- $\log_a \left(r^s\right) = s \log_a r$, pre $a > 0, a \neq 1, r > 0, s \in R$,
- $a^{\log_a x} = x$, pre $a > 0, a \neq 1, x > 0$.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie: (pozri tiež *2.1 Funkcia a jej vlastnosti)*

- zdôvodniť rovnosti uvedené v časti *Vlastnosti a vzťahy,*

(exponenciálna funkcia)

- použiť rovnosti uvedené v časti *Vlastnosti a vzťahy* pri úprave výrazov (pozri *1.2 Čísla, premenné a výrazy),*
- riešiť exponenciálne rovnice a nerovnice (pozri *1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy),*
- na konkrétnom príklade vysvetliť, ako z opisu exponenciálneho rastu (za rovnaký čas *x* sa hodnota *y* zväčší vždy o rovnaký počet percent) vyplýva predpis exponenciálnej funkcie $y = a^x$,
- rozhodnúť o raste, resp. klesaní funkcie a^x v závislosti od čísla *a* a vie načrtnúť graf tejto funkcie s vyznačením jeho „význačných” bodov (t. j. [0, 1], [1, *a*]),
- rozhodnúť o ohraničenosti zhora, resp. zdola funkcie a^x *v* danom intervale,
- vyjadriť *n*-tý člen geometrickej postupnosti pomocou jej prvého (alebo iného než *n*-tého) člena a kvocientu *q*,
- nájsť súčet *n* za sebou nasledujúcich členov geometrickej postupnosti,
- rozhodnúť o raste, resp. klesaní geometrickej postupnosti v závislosti od jej prvého člena a kvocientu,

- vyriešiť základné úlohy na pravidelné vkladanie alebo vyberanie súm z banky, resp. splácanie pôžičky (pomocou tabuľkového kalkulátora (kalkulačky) alebo pomocou vzťahov pre súčet členov geometrickej postupnosti),

(logaritmická funkcia)

- použiť rovnosti uvedené v časti *Vlastnosti a vzťahy* pri úpravách výrazov (pozri *1.2 Čísla, premenné a výrazy),*
- vysvetliť, ako základné vlastnosti logaritmov súvisia s vlastnosťami exponenciálnych funkcií,
- riešiť logaritmické rovnice a nerovnice (pozri *1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy),*
- rozhodnúť o raste, resp. klesaní funkcie $\log_a x$ v závislosti od čísla a a vie načrtnúť graf tejto funkcie s vyznačením jeho „význačných” bodov (t. j. [1, 0], [*a*, 1]),
- rozhodnúť o ohraničenosti zhora, resp. zdola logaritmickej funkcie v danom intervale,
- vyriešiť jednoduché úlohy na výpočet úrokov.

2.5 Goniometrické funkcie

Obsah

Pojmy:

π, goniometrická funkcia, sínus, kosínus, tangens, (najmenšia) perióda, jednotková kružnica, oblúková miera, stupňová miera, uhol základnej veľkosti.

Vlastnosti a vzťahy:

- Hodnoty goniometrických funkcií pre uhly $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$,
- vzťahy pre sínus a kosínus dvojnásobného uhla:
  $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$,
- $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$,
  $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$,
  $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$,
- graf funkcie kosínus vznikne posunutím grafu funkcie sínus,
- periodickosť a najmenšie periódy jednotlivých goniometrických funkcií.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie: (pozri tiež *2.1 Funkcia a jej vlastnosti)*

- použiť rovnosti uvedené v časti *Vlastnosti a vzťahy* pri úprave goniometrických výrazov (pozri *1.2 Čísla, premenné a výrazy),*
- nájsť pomocou kalkulačky riešenie rovnice $f(x) = a$, kde *f* je goniometrická funkcia, a to aj v prípade, že na kalkulačke niektoré goniometrické alebo inverzné goniometrické funkcie nie sú (pozri tiež *1.2 Čísla, premenné a výrazy),*
- riešiť goniometrické rovnice a nerovnice (pozri *1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy),*
- vyjadriť hodnoty goniometrických funkcií pre uhly $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ako pomery strán pravouhlého trojuholníka,
- vyjadriť *(na základe znalosti súmerností a periodickosti grafov goniometrických funkcií)*

$\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ pre $\alpha \in R$ ako sínus, kosínus alebo tangens vhodného uhla $\beta \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$,

- nájsť hodnoty všetkých goniometrických funkcií pre daný argument, ak pre tento argument pozná hodnotu aspoň jednej z nich,
- načrtnúť grafy funkcií $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$, určiť hodnoty v bodoch $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, určiť najmenšie periódy týchto grafov,
- určiť podintervaly daného ohraničeného intervalu, na ktorých sú funkcie $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$ rastúce, resp. klesajúce,
- rozhodnúť o ohraničenosti funkcie tg *x v* danom intervale,
- načrtnúť (pre všetky prípustné hodnoty *x* alebo pre hodnoty z daného intervalu) grafy funkcií $k(f(x))$, $f(kx)$, $f(ax + b)$, $f(x) + a$, kde $k, a, b \in R$ a *f* je niektorá z goniometrických funkcií, určiť priesečníky týchto funkcií s *x*-ovou osou, ich periódu a obor hodnôt a – pokiaľ existujú – najmenšie a najväčšie hodnoty,
- použiť goniometrické funkcie pri výpočte prvkov pravouhlého aj všeobecného trojuholníka (pozri tiež *3.1 Základné rovinné útvary)*,
- zdôvodniť tvrdenia uvedené v časti *Vlastnosti a vzťahy*.

3 PLANIMETRIA

3.1 Základné rovinné útvary

Obsah

Pojmy:

a) Lineárne útvary
bod, priamka, polpriamka, úsečka, stred úsečky, deliaci pomer, polrovina, rovnobežné a rôznobežné priamky, uhol (ostrý, pravý, priamy, tupý), susedné, vrcholové, súhlasné a striedavé uhly, os úsečky, os uhla, uhol dvoch priamok, kolmé priamky, kolmica, vzdialenosť (dvoch bodov, bodu od priamky, rovnobežných priamok).

b) Kružnica a kruh
stred, polomer *(ako číslo i ako úsečka)*, priemer, tetiva, kružnicový oblúk, dotyčnica, sečnica a nesečnica, stredový a obvodový uhol, obvod kruhu a dĺžka kružnicového oblúka, kruhový výsek a odsek, medzikružie, obsah kruhu a kruhového výseku, spoločné (vonkajšie, vnútorné) dotyčnice dvoch kružníc.

c) Trojuholník
trojuholník (ostrouhlý, pravouhlý, tupouhlý, rovnoramenný a rovnostranný trojuholník), vrchol, strana *(ako vzdialenosť, ako úsečka)*, výška *(ako vzdialenosť, ako úsečka i ako priamka)*, uhol, ťažnica, ťažisko, stredná priečka, kružnica trojuholníka opísaná, kružnica do trojuholníka vpísaná, obvod a obsah trojuholníka, trojuholníková nerovnosť, Pytagorova veta, Euklidove vety, sínusová a kosínusová veta.

d) Štvoruholníky a mnohouholníky
vrchol, strana *(ako vzdialenosť, ako úsečka)*, uhlopriečka, uhol, konvexný štvoruholník, rovnobežník, kosoštvorec, obdĺžnik, štvorec, lichobežník, rovnoramenný lichobežník, základňa a rameno lichobežníka, výška rovnobežníka a lichobežníka, obsah rovnobežníka a lichobežníka, konvexné, nekonvexné a pravidelné mnohouholníky, obsah mnohouholníka.

Vlastnosti a vzťahy:

a) Lineárne útvary

- Súhlasné uhly pri dvoch rovnobežkách sú rovnaké,
- striedavé uhly pri dvoch rovnobežkách sú rovnaké,
- súčet susedných uhlov je 180°,
- vrcholové uhly sú zhodné.

b) Trojuholník

- Trojuholníková nerovnosť,
- súčet vnútorných uhlov trojuholníka (numericky aj graficky),
- oproti väčšej (menšej) strane leží väčší (menší) uhol, oproti zhodným stranám ležia zhodné uhly,
- delenie ťažníc ťažiskom,
- priesečník osí strán je stred opísanej kružnice, priesečník osí uhlov je stred vpísanej kružnice,
- vyjadrenie obsahu trojuholníka pomocou
  - dĺžky strany a k nej príslušnej výšky,
  - dĺžky dvoch strán a sínusu uhla týmito stranami určeného,

- Pytagorova veta, goniometria pravouhlého trojuholníka *(*pozri *2.5. Goniometrické funkcie),*
- vyjadrenie kosínusov uhlov trojuholníka pomocou dĺžok strán (kosínusová veta),
- $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{a}{b}$, $\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{b}{c}$, $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}=\frac{a}{c}$ (sínusová veta),
- zhodné a podobné trojuholníky, vety o zhodnosti (sss, sus, usu, Ssu) a podobnosti (sss, sus, uu) trojuholníkov, Euklidove vety,
- vzťah medzi pomerom podobnosti dvoch trojuholníkov a
  - dĺžkami odpovedajúcich si úsečiek,
  - veľkosťami odpovedajúcich si uhlov,
  - ich obsahmi.

c) Kružnica a kruh
- Kružnica je jednoznačne určená stredom a polomerom, resp. tromi svojimi bodmi,
- žiadne tri body kružnice neležia na priamke,
- kolmosť dotyčnice k príslušnému polomeru kružnice,
- Tálesova veta, vzťah medzi stredovým uhlom a obvodovými uhlami príslušnými k danej tetive,
- závislosť vzájomnej polohy kružnice a priamky na polomere kružnice a vzdialenosti jej stredu od priamky,
- dotykový bod dvoch kružníc leží na spojnici stredov kružníc, závislosť vzájomnej polohy dvoch kružníc od vzdialenosti stredov kružníc a ich polomerov,
- vzťahy pre výpočet obvodu a obsahu kruhu, dĺžky kružnicového oblúka a obsahu kruhového výseku.

d) Štvoruholníky a mnohouholníky
- Rovnobežnosť a rovnaká dĺžka protiľahlých strán rovnobežníka,
- rozpoľovanie uhlopriečok v rovnobežníku,
- zhodnosť protiľahlých vnútorných uhlov v rovnobežníku,
- súčet susedných uhlov rovnobežníka,
- súčet vnútorných uhlov lichobežníka priľahlých k jeho ramenu,
- uhlopriečky kosoštvorca sú na seba kolmé a rozpoľujú vnútorné uhly,
- zhodnosť uhlopriečok obdĺžnika a štvorca,
- rovnobežník je stredovo súmerný,
- obdĺžnik a štvorec sú súmerné podľa osí strán,
- kosoštvorec je súmerný podľa uhlopriečok,
- rovnoramenný lichobežník je súmerný podľa osi základní,
- pravidelnému *n*-uholníku sa dá vpísať a opísať kružnica,
- v rovnoramennom lichobežníku sú zhodné uhlopriečky a zhodné uhly pri základni,
- obsah rovnobežníka vyjadrený pomocou strany a príslušnej výšky, resp. pomocou susedných strán a uhla nimi určeného,
- obsah lichobežníka vyjadrený pomocou výšky a veľkosti základní.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:
- približne vypočítať obvod a obsah narysovaných trojuholníkov, *n*-uholníkov, kruhov a ich častí,
- vypočítať v trojuholníku, jednoznačne určenom jeho stranami, resp. stranami a uhlami, zvyšné strany a uhly, dĺžky ťažníc, výšok, obvod a obsah,

- rozhodnúť, či sú dva trojuholníky zhodné alebo podobné,
- vlastnosti zhodnosti a podobnosti použiť vo výpočtoch a jednoduchých dôkazoch (napr. *niektorých tvrdení o mnohouholníkoch uvedených v časti Vlastnosti a vzťahy*),
- odvodiť Pytagorovu a Euklidove vety, vypočítať dĺžky i vzdialenosti pomocou týchto viet,
- odvodiť Tálesovu vetu a využiť ju pri jednoduchých konštrukčných úlohách,
- vysvetliť myšlienku odvodenia vzorcov pre obsah rovnobežníka, trojuholníka a lichobežníka,
- vysvetliť (napr. *pomocou priamej úmernosti*) odvodenie vzorca na výpočet dĺžky kruhového oblúka a obsahu kruhového výseku,
- vypočítať obvod a obsah kruhu a kruhového výseku,
- rozhodnúť o vzájomnej polohe
  - priamky a kružnice,
  - dvoch kružníc, ak pozná ich polomery a vzdialenosť stredov,
- vypočítať obsah rovnobežníka, lichobežníka, resp. rozkladom na trojuholníky aj obsah iných mnohouholníkov,
- vypočítať veľkosť uhla uhlopriečok, resp. uhlopriečkou a stranou, v pravidelnom mnohouholníku,
- dokázať tvrdenie o súčte veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka,
- zdôvodniť tvrdenia o delení ťažníc ťažiskom, o strede kružnice vpísanej, resp. opísanej trojuholníku,
- odvodiť sínusovú a kosínusovú vetu,
- zdôvodniť vzorce na výpočet obsahu trojuholníka uvedené v časti *Vlastnosti a vzťahy*,
- zdôvodniť tvrdenie o vzťahu stredového a obvodového uhla,
- zistiť približné rozmery nedostupných útvarov použitím podobnosti, trigonometrie alebo merania vzdialeností na pláne zostrojenom vo vhodnej mierke.

3.2 Analytická geometria v rovine

Obsah

Pojmy:

(karteziánska) súradnicová sústava na priamke (číselná os) a v rovine, súradnice bodu, všeobecná rovnica priamky, smernica priamky, smernicový tvar rovnice priamky, rovnica kružnice, vektor, umiestnenie vektora, súradnice vektora, vektor opačný k danému vektoru, nulový vektor, súčet a rozdiel dvoch vektorov, násobok vektora číslom, dĺžka vektora, skalárny súčin vektorov, parametrické rovnice priamky, smerový a normálový vektor priamky.

Vlastnosti a vzťahy:

- Vyjadrenie vzdialenosti dvoch bodov pomocou ich súradníc,
- vzťah medzi smernicami dvoch rovnobežných, resp. kolmých priamok,
- vzťah medzi koeficientmi všeobecných rovníc dvoch rovnobežných, resp. kolmých priamok,
- aspoň jeden vzťah alebo postup pre výpočet
  - veľkosti uhla dvoch priamok (napr. *pomocou skalárneho súčinu, kosínusovej vety alebo smerníc),*
  - vzdialenosti bodu od priamky,
- geometrická interpretácia súčtu dvoch vektorov a násobku vektora reálnym číslom a ich vyjadrenie pomocou súradníc daných vektorov,
- body A, B a C ležia na jednej priamke, ak jeden z vektorov $B - A$ a $C - A$ je násobkom

druhého,
- vzťah medzi smerovými vektormi dvoch rovnobežných priamok,
- vzdialenosť dvoch bodov ako dĺžka vektora,
- kolmosť dvoch priamok a jej vzťah so skalárnym súčinom ich smerových vektorov,
- vyjadrenie skalárneho súčinu vektorov pomocou dĺžok vektorov a kosínusu ich uhla (resp. vyjadrenie kosínusu uhla dvoch vektorov pomocou ich skalárneho súčinu a ich dĺžok), vyjadrenie skalárneho súčinu vektorov pomocou ich súradníc,
- vzťah medzi koeficientmi všeobecnej rovnice priamky a normálovým vektorom priamky.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti
Žiak vie:
- zostrojiť (v danej súradnicovej sústave) obrazy bodov, ak pozná ich súradnice, a určiť súradnice daných bodov,
- vypočítať súradnice stredu úsečky, resp. bodu, ktorý úsečku rozdeľuje v danom pomere,
- napísať analytické vyjadrenie priamky
  - prechádzajúcej dvoma danými bodmi,
  - daným bodom rovnobežne s danou priamkou,
  - prechádzajúcej daným bodom kolmo na danú priamku,
- určiť vzájomnú polohu dvoch priamok (ak sú dané ich rovnice) a nájsť súradnice ich prípadného priesečníka,
- vypočítať
  - vzdialenosť dvoch bodov,
  - vzdialenosť bodu od priamky,
  - vzdialenosť dvoch rovnobežných priamok,
  - obsah trojuholníka určeného jeho vrcholmi,
  - veľkosť uhla dvoch priamok,
- napísať rovnicu kružnice
  - ak pozná jej stred a polomer,
  - v tvare $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$, ak pozná tri body, ktorými kružnica prechádza,
- určiť z rovnice kružnice jej stred a polomer,
- opísať v súradnicovej sústave pomocou rovníc a nerovníc úsečku, kružnicu, polrovinu a kruh,
- rozhodnúť o vzájomnej polohe
  - priamky a kružnice,
  - dvoch kružníc, ak pozná ich rovnice,
- zdôvodniť
  - vzťah pre výpočet vzdialenosti dvoch bodov,
  - súvis medzi skalárnym súčinom dvoch vektorov a kosínusom ich uhla,
  - vzťah medzi smernicami (resp. koeficientmi všeobecných rovníc) dvoch rovnobežných alebo kolmých priamok,
  - vzťah medzi koeficientmi všeobecnej rovnice priamky a normálovým vektorom priamky,
- pri riešení planimetrických úloh používať analytickú metódu, t. j. vie
  - si vhodne zvoliť súradnicovú sústavu a algebraicky spracovať zadanie,
  - pomocou vedomostí z algebry a poznatkov o vektoroch algebraicky vyriešiť úlohu,
  - algebraický výsledok „preložiť“ do geometrického kontextu úlohy.

3.3 Množiny bodov daných vlastností a ich analytické vyjadrenie

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- geometricky opísať, načrtnúť a nájsť (v danej alebo vhodne zvolenej súradnicovej sústave) analytické vyjadrenie množiny bodov s konštantnou vzdialenosťou od
  - bodu,
  - priamky,
  - kružnice,
- geometricky opísať a načrtnúť množiny bodov,
  - z ktorých vidieť danú úsečku pod daným uhlom,
  - ktoré majú rovnakú vzdialenosť od
    - dvoch bodov,
    - dvoch rovnobežných priamok,
    - dvoch rôznobežných priamok,
- geometricky opísať a načrtnúť množiny bodov, ktoré majú
  - od daného bodu vzdialenosť menšiu (väčšiu) ako dané kladné číslo,
  - od danej priamky vzdialenosť menšiu (väčšiu) ako dané kladné číslo,
  - od jedného bodu väčšiu vzdialenosť ako od druhého bodu,
  - od jednej danej priamky väčšiu vzdialenosť ako od druhej danej priamky,
- zdôvodniť, prečo *množiny bodov* uvedené v predchádzajúcich bodoch majú uvedenú podobu a použiť tieto *množiny bodov* pri riešení jednoduchých konštrukčných úloh *(*pozri *3.5 Konštrukčné úlohy),*
- znázorniť množinu bodov [*x*, *y*], pre ktoré platí
  - $y * f(x)$, kde $*$ je jeden zo znakov $<, \leq, \geq, >$ a *f* je predpis funkcie, ktorej graf vie žiak znázorniť *(*pozri *2.1 Funkcia a jej vlastnosti),*
  - $ax + by + c * 0$,

  a v jednoduchých prípadoch aj množinu bodov [*x*, *y*], ktorá je opísaná sústavou dvoch z predchádzajúcich nerovníc *(*pozri tiež *1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy),*

3.4 Zhodné a podobné zobrazenia

Obsah

Pojmy:

zhodné zobrazenie, osová súmernosť, os súmernosti, posunutie, stredová súmernosť, stred súmernosti, otočenie, stred otočenia, orientovaný uhol a jeho veľkosti, uhol otočenia, osovo a stredovo súmerný útvar; podobné zobrazenie, pomer podobnosti, rovnoľahlosť, stred a koeficient rovnoľahlosti, samodružný bod.

Vlastnosti a vzťahy:

- Stredová súmernosť je jednoznačne určená stredom súmernosti, resp. dvoma odpovedajúcimi si bodmi,
- osová súmernosť je jednoznačne určená osou súmernosti, resp. dvoma odpovedajúcimi si bodmi,
- otočenie je jednoznačne určené stredom a uhlom otáčania,
- posunutie je jednoznačne určené vektorom posunutia, resp. dvoma odpovedajúcimi si bodmi,
- vzťah medzi orientovaným uhlom a jeho veľkosťou,

- rovnobežník je stredovo súmerný,
- obdĺžnik a štvorec sú súmerné podľa osí strán,
- kosoštvorec je súmerný podľa uhlopriečok,
- rovnoramenný lichobežník je súmerný podľa osi základní,
- nech *A*, *B* sú dva osovo súmerné body podľa priamky *p*, potom *AB* je kolmá na *p* a stred *AB* leží na *p*,
- priamka a jej obraz v posunutí sú rovnobežné,
- rovnoľahlosť je jednoznačne určená stredom a koeficientom rovnoľahlosti, dvoma vhodne zvolenými dvojicami odpovedajúcich si bodov,
- dve rovnoľahlé priamky sú rovnobežné,
- každé dve nezhodné rovnobežné úsečky sú rovnoľahlé (dvoma spôsobmi),
- každé dve kružnice s rôznym polomerom sú si podobné (sú rovnoľahlé),
- vonkajšie (vnútorné) spoločné dotyčnice dvoch kružníc sa pretínajú v strede rovnoľahlosti,
- vzťah medzi pomerom podobnosti dvoch útvarov a
  - dĺžkami zodpovedajúcich si úsečiek,
  - veľkosťami zodpovedajúcich si uhlov,
  - ich obsahmi.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti
Žiak vie:
- zobraziť daný bod (útvar, graf) v danom zhodnom alebo podobnom zobrazení,
- rozhodnúť, či je daný útvar osovo (stredovo) súmerný,
- napísať súradnice bodu (rovnicu priamky, úsečky, kružnice), ktorý je obrazom daného bodu (danej priamky, úsečky, kružnice)
  - v súmernosti podľa začiatku súradnej sústavy,
  - v súmernosti podľa niektorej súradnej osi alebo podľa priamky $y = x$,
  - v posunutí,
- zostrojiť
  - stredy rovnoľahlosti dvoch daných kružníc,
  - obraz daného útvaru v danom zhodnom zobrazení alebo rovnoľahlosti, resp. útvar podobný s daným útvarom, pri danom pomere podobnosti,
- zhodné zobrazenia a rovnoľahlosť (resp. podobnosť) použiť v jednoduchých konštrukčných úlohách (pozri *3.5 Konštrukčné úlohy*).

3.5 Konštrukčné úlohy

Obsah

Pojmy:

rozbor, náčrt, konštrukcia, postup konštrukcie.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti
Žiak vie:
- zdôvodniť postup konštrukcie, t. j. urobiť rozbor jednoduchých konštrukčných úloh, pričom vie použiť
  - nasledujúce základné konštrukcie *(na ktoré sa môže pri opise postupu zložitejších konštrukčných úloh odvolávať bez toho, aby ich podrobne* rozpisoval):
    - rovnobežku s danou priamkou daným bodom,
    - rovnobežku s danou priamkou v predpísanej vzdialenosti,

- os úsečky, os uhla,
- priamku, ktorá prechádza daným bodom a zviera s danou priamkou daný uhol,
- úsečku dĺžky $\frac{ab}{c}$ (pomocou podobnosti), kde *a*, *b*, *c* sú dĺžky narysovaných úsečiek,
- rozdeliť úsečku v danom pomere,
- trojuholník určený:
  - tromi stranami,
  - dvoma stranami a uhlom,
  - dvoma uhlami a stranou,
- kružnicu
  - trojuholníku opísanú,
  - do trojuholníka vpísanú,
- dotyčnicu kružnice
  - v danom bode kružnice,
  - z daného bodu ležiaceho mimo kružnice,
  - rovnobežnú s danou priamkou,
- stredy rovnoľahlosti dvoch kružníc a spoločné dotyčnice dvoch kružníc,
- obraz daného bodu, úsečky, priamky, kružnice v danom zhodnom zobrazení, resp. v rovnoľahlosti *(*pozri *3. 4 Zhodné a podobné zobrazenia)*,
- množiny bodov daných vlastností, uvedené v prvom a druhom bode v *3.3 Množiny bodov daných vlastností a ich analytické vyjadrenie*,

- množiny bodov daných vlastností,

- pri kreslení náčrtu pri rozbore úlohy rozlíšiť jednotlivé možnosti zadania *(napr. „výška leží v trojuholníku" a „výška je mimo trojuholníka")*,
- na základe vykonaného (daného) rozboru napísať postup konštrukcie,
- uskutočniť konštrukciu danú opisom,
- určiť počet riešení v prípade číselne zadaných úloh,
- vysvetliť myšlienku konštrukcie
  – osi uhla a osi úsečky,
  – kolmice na danú priamku daným bodom (ležiacim na priamke alebo mimo nej),
  – úsečky dĺžky $\frac{ab}{c}$,
  – kružnice vpísanej do trojuholníka a opísanej trojuholníku,
  – dotyčnice kružnice z bodu ležiaceho mimo kružnice,
  – spoločných dotyčníc dvoch kružníc.

4 STEREOMETRIA

4.1 Základné spôsoby zobrazovania priestoru do roviny

Obsah

Pojmy:

premietanie (voľné rovnobežné premietanie), priemet bodu, priestorového útvaru do roviny.

Vlastnosti a vzťahy:

- Voľné rovnobežné premietanie zachováva deliaci pomer a rovnobežnosť.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti
Žiak vie:

- použiť vlastnosti voľného rovnobežného premietania pri zobrazovaní kocky, pravidelných hranolov a pravidelných ihlanov,
- nakresliť bokorys, pôdorys a nárys jednoduchých útvarov zložených z kociek,
- poznať príklady iných spôsobov znázorňovania priestoru (napr. vrstevnice, lineárna perspektíva).

4.2 Súradnicová sústava v priestore

Obsah

Pojmy:

(karteziánska) sústava súradníc v priestore, bod a jeho súradnice, vzdialenosť bodov.

Vlastnosti a vzťahy:

- Vyjadrenie vzdialenosti dvoch bodov pomocou ich súradníc.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti
Žiak vie:

- zostrojiť (v danej súradnicovej sústave) obrazy bodov, ak pozná ich súradnice, a určiť súradnice daných bodov, špeciálne vo vhodne zvolenej súradnicovej sústave opísať vrcholy daného kvádra.
- určiť súradnice stredu úsečky a súradnice bodu, ktorý delí danú úsečku v danom pomere.

4.3 Lineárne útvary v priestore – polohové úlohy

Obsah

Pojmy:

bod, priamka a rovina v priestore, rovnobežné, rôznobežné a mimobežné priamky, rovnobežnosť a rôznobežnosť priamky a roviny, rovnobežné a rôznobežné roviny, priesečnica dvoch rovín, rez telesa rovinou.

Vlastnosti a vzťahy:

- Rovnobežné (rôznobežné) priamky ležia v jednej rovine, mimobežné priamky neležia v jednej rovine,

- priesečnice roviny s dvoma rovnobežnými rovinami sú rovnobežné.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti
Žiak vie:
- opísať možnosti pre vzájomné polohy ľubovoľných dvoch lineárnych útvarov,
- rozhodnúť o vzájomnej polohe dvoch lineárnych útvarov pomocou ich obrazu vo voľnom rovnobežnom premietaní,
- zostrojiť vo voľnom rovnobežnom priemete jednoduchého telesa (kocky, resp. hranola) priesečník priamky (určenej dvoma bodmi ležiacimi v rovinách stien kocky, resp. hranola) s rovinou steny daného telesa,
- zostrojiť rovinný rez kocky, kvádra rovinou určenou tromi bodmi ležiacimi v rovinách stien, z ktorých aspoň dva ležia v tej istej stene daného telesa.

4.4 Lineárne útvary v priestore – metrické úlohy

Obsah

Pojmy:

uhol dvoch priamok, kolmosť priamok a rovín, priamka kolmá k rovine, uhol dvoch rovín, kolmý priemet bodu a priamky do roviny, vzdialenosť dvoch lineárnych útvarov (dvoch bodov, bodu od roviny, bodu od priamky, vzdialenosť rovnobežných priamok, priamky a roviny s ňou rovnobežnej, vzdialenosť rovnobežných rovín), uhol priamky s rovinou.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti
Žiak vie:
- na zobrazených telesách označiť
  - úsečky, ktorých skutočná veľkosť predstavuje vzdialenosť daných lineárnych útvarov,
  - uhly, ktorých skutočná veľkosť predstavuje uhol daných lineárnych útvarov,
- v jednoduchých prípadoch graficky určiť (t. j. narysovať v skutočnej veľkosti)
  - uhol, vzdialenosť lineárnych útvarov daných svojimi rovnicami alebo obrazom vo voľnom rovnobežnom premietaní.

4.5 Telesá

Obsah

Pojmy:

teleso, mnohosten, vrchol, hrana, stena, kocka, sieť kocky, hranol, kolmý a pravidelný hranol, kváder, rovnobežnosten, ihlan, štvorsten, pravidelný štvorsten, podstava, výšky v štvorstene, guľa, valec, kužeľ, objemy a povrchy telies.

Vlastnosti a vzťahy:

- Vzťahy pre výpočty objemov a povrchov telies.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti
Žiak vie:
- rozhodnúť, či daná sieť je sieťou telesa daného obrazom vo voľnom rovnobežnom premietaní,
- načrtnúť sieť telesa daného obrazom vo voľnom rovnobežnom premietaní,
- riešiť úlohy, ktorých súčasťou je výpočet objemu, resp. povrchu kocky, kvádra,

pravidelného kolmého hranola, pravidelného ihlana, gule, valca, kužeľa a vie pritom nájsť a aktívne použiť vzťahy pre výpočet objemov a povrchov telies potrebné pre vyriešenie úlohy,
- vysvetliť súvislosť rezu guľou a uhlov s geografickým súradnicovým systémom poludníkov a rovnobežiek.

5 KOMBINATORIKA, PRAVDEPODOBNOSŤ A ŠTATISTIKA

5.1 Kombinatorika a pravdepodobnosť

Obsah

Pojmy:

(kombinatorické) pravidlo súčtu, (kombinatorické) pravidlo súčinu, permutácie a permutácie s opakovaním, variácie a variácie s opakovaním, kombinácie, faktoriál, kombinačné číslo, Pascalov trojuholník, pravdepodobnosť, doplnková pravdepodobnosť, Laplaceova schéma, „geometrická“ pravdepodobnosť, náhodný jav, nezávislé javy.

Vlastnosti a vzťahy:

- $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$, $0! = 1$,
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$, $C_k(n) = \binom{n}{k}$, $V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$, $P_n = n!$, $V'_k = n^k$, $P'_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$,
- pre pravdepodobnosť P udalosti A platí $0 \le P(A) \le 1$,
- $P(A) + P(A') = 1$, kde A' je doplnková udalosť k udalosti A,
- pravdepodobnosť istej udalosti je 1,
- $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$, ak A, B sú nezávislé javy,
- $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- riešiť jednoduché kombinatorické úlohy
  - vypisovaním všetkých možností, pričom
    - vie vytvoriť systém (strom logických možností) na vypisovanie všetkých možností (ak sa v tomto strome vyskytujú niektoré možnosti viackrát, vie určiť násobnosť ich výskytu),
    - dokáže objaviť podstatu daného systému a pokračovať vo vypisovaní všetkých možností,
    - na základe vytvoreného systému vypisovania všetkých možností určiť (pri väčšom počte možností algebraickým spracovaním) počet všetkých možností,
  - použitím kombinatorického pravidla súčtu a súčinu,
  - využitím vzťahov pre počet kombinácií, variácií, variácií s opakovaním, permutácií a permutácií s opakovaním,
- použiť pri úprave výrazov rovnosti uvedené v časti *Vlastnosti a vzťahy* (pozri *1.4 Čísla, premenné a výrazy*),
- rozhodnúť
  - o závislosti javov A, B, ak pozná $P(A)$, $P(B)$ a $P(A\cap B)$,
  - v jednoduchých prípadoch o správnosti použitia rovnosti $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$,
- riešiť úlohy na pravdepodobnosť, založené na
  - úvahách o ideálnych pokusoch (vychádzajúcich z chápania pravdepodobnosti ako ideálnej relatívnej početnosti),

  - hľadaní pomeru všetkých priaznivých a všetkých možností, resp. všetkých nepriaznivých a všetkých priaznivých možností, ak vie tieto počty určiť riešením jednoduchých kombinatorických úloh,
  - doplnkovej pravdepodobnosti,
  - využití „geometrickej“ pravdepodobnosti,
  - použitím vzorcov na súčet alebo súčin pravdepodobností,
- na príklade vysvetliť rozdiel medzi javom s pravdepodobnosťou 0 a nemožným javom, resp. javom s pravdepodobnosťou 1 a istým javom,
- vysvetliť, ako vyplývajú pravidlá $P(A) + P(A') = 1$ (kde A' je doplnková udalosť k udalosti A) a $P(A \vee B) = P(A) + P(B)$ (kde A, B sú navzájom vylučujúce sa udalosti) z Laplaceovej schémy, resp. z interpretácie pravdepodobnosti ako ideálnej relatívnej početnosti,
- vysvetliť, prečo pre nezávislé javy platí rovnosť $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

5.2 Štatistika

Obsah

Pojmy:

diagram – graf (stĺpcový, obrázkový, kruhový, lomený, spojitý, histogram), základný súbor, výberový súbor, rozdelenie, modus, medián, aritmetický priemer (aj viac ako dvoch čísel), stredná hodnota, smerodajná odchýlka, rozptyl, triedenie, rozdelenie pravdepodobnosti, bernoulliovské pokusy.

Vlastnosti a vzťahy:

- Vzťah pre výpočet rozptylu.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- zostaviť tabuľky absolútnych frekvencií,
- vypočítať aritmetický priemer daných čísel,
- získavať informácie z rôznych tabuliek (napr. cestovný poriadok) a diagramov,
- spracovať údaje do vhodných diagramov,
- zistiť v danom súbore modus, medián, strednú hodnotu, priemer,
- na konkrétnych príkladoch (napr. *priemerná úroková miera*) vysvetliť, ako pojem priemerná hodnota závisí od kontextu a uviesť príklady, v ktorých takouto priemernou hodnotou bude aritmetický priemer, resp. hodnota rôzna od aritmetického priemeru,
- pomocou vhodného softvéru zistiť v danom súbore rozptyl, smerodajnú odchýlku a uviesť štatistickú interpretáciu získaných výsledkov,
- uviesť príklad súboru s požadovanými podmienkami na modus, medián, strednú hodnotu, priemer, rozptyl, smerodajnú odchýlku,
- znázorniť a vyhodnotiť namerané hodnoty,
- navrhnúť v jednoduchých prípadoch organizáciu súboru obsahujúceho veľký počet dát,
- urobiť triedenie a znázorniť ho,
- uviesť príklady náhodných dejov, ktoré nie je vhodné modelovať normálnym rozdelením, uviesť príklady iných rozdelení početnosti/pravdepodobnosti,
- opísať (napr. *pomocou „urnového modelu“ a bernoulliovských pokusov*) výsledok náhodného výberu zo súboru, v ktorom pravdepodobnosť vybrať prvok s danou vlastnosťou je p %,

- vysvetliť myšlienku odhadu relatívnej frekvencie skúmaného znaku v základnom súbore pomocou jeho relatívnej frekvencie v súbore získanom náhodným výberom,
- v jednoduchých prípadoch rozhodnúť, či informácie získané z výberového súboru možno zovšeobecniť na základný súbor,
- navrhnúť realizáciu (resp. realizovať) prieskum, graficky ho spracovať a interpretovať.